Муниципальное автономное образовательное учреждение
«Физико-математическая школа № 56 г. Улан-Удэ» Республики Бурятия

«Рассмотрено	«Согласовано»	«Утверждено»
на заседании ШМО»	заместитель директора	Директор
Руководитель ШМО	по УВР	МАОУ ФМШ № 56
/ Т.А. Маленкова /	/И.В. Будаева/	_____ /В.В. Перинова/
ФИО	ФИО	ФИО
Протокол № 1 от	Протокол № 1 от	Приказ № 159 от
«31» августа 2020г.	«31» 08 2020г	«31» 08 2020г.

Методические рекомендации по изучению темы

«Линейная функция, её график и свойства в 7 классе»

Составлены на основе действующей
Примерной программы для основного общего образования по математике

Автор: Маленкова Т.А., учитель математики высшей квалификационной категории

г. Улан-Удэ, 2020 г

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические рекомендации разработаны в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования для предмета «Алгебра. 7 класс» по теме «Линейная функция, её график и свойства в 7 классе».

Данный материал позволит, сформировать предметные результаты, утвержденные ФГОС ООО (утв. приказом Министерства образования и науки РФ от 17 декабря 2010 г. № 1897) «…овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей».

Цель методических рекомендаций – систематизировать, расширить и углубить учебный материал по теме *«Линейная функция, ее график и свойства».*

Данная тема – начальный этап в изучении темы «Функция» в 7-11 классах, одного из глобальных понятий математического анализа – определение углового коэффициента прямой (коэффициента касательной – нахождение геометрического смысла производной функции в точке).

По теме «Линейная функция» в различных учебниках имеется большое количество задач на формирование понятий линейной функции и прямой пропорциональности. Задачи разнообразные по требованию и по дидактическим целям.

Как показывает педагогическая практика, график линейной функции, строящейся по двум точкам (аксиома планиметрии), хорошо запоминается учащимися, но далеко не всегда глубоко понимается смысл коэффициентов (параметров) k и b, и как линейная функция связана с понятием уравнения прямой на плоскости $Ax + By + C = 0$.

Трудности у учащихся возникают при решении практико-ориентированных задач, где необходимо построить график функции, как математическую модель реального процесса, прочитать график функции (свойств функции: область определения функции, область значения функции, возрастание и убывание функции, нахождение аргумента функции при значении функции равное нулю, больше нуля, меньше нуля).

В работе представлена авторская методика изучения линейной функция, её графика и свойств в 7 классе. Особенность, которой заключается в изменении последовательности изучения данной темы от общего понятия графика *линейного уравнения на плоскости,* к графику прямой пропорциональности, а далее к графику линейной функции. Учебный материал разбит на мелкие элементы, и отрабатывается в простых упражнениях. Это позволит обобщить и расширить базовые понятия на продвинутом уровне, через решения более сложных задач.

Такой подход является подготовительным этапом к изучению кусочно-линейных функций, квадратичных функций, что позволит более эффективно готовить учащихся к решению параметрических задач графическим способом.

В первой главе «Прямая пропорциональность $y=kx$, её график и свойства» представлены задания, позволяющие сформировать понятийный аппарат, который относится к графику прямой пропорциональности:

- линейное уравнение на координатной плоскости, при $b=0$;
- построение точек по координатам (прямая пропорциональность – частный случай линейной функции);
- нахождение значения функции по известному значению аргумента и обратная задача;
- определение коэффициента пропорциональности (угловой коэффициент прямой) по формуле, его связь с монотонностью функции;

- расположение графика на координатной плоскости в зависимости от углового коэффициента прямой;
- чтение графиков зависимостей одной величины от другой в реальной ситуации и их расположения на плоскости.

Во второй главе «Линейная функция $y = kx + b$, её график и свойства» приведены упражнения, позволяющие сформировать навыки и умения:

построения графика линейной функции

- используя преобразования плоскости – параллельный перенос, движение графика прямой пропорциональности вдоль оси ординат (решение алгебраической задачи с помощью геометрии);
- по двум точкам плоскости, принадлежащих прямой;
- по точке, лежащей на оси ординат, и угловому коэффициенту прямой;
- по двум точкам лежащих на осях координат (уравнение прямой в отрезках).

записи аналитической модели линейной функции (формулу) по графику

- определение коэффициента b, ординаты точки пересечения прямой с осью ординат, при различных случаях;
- определение углового коэффициента прямой по формуле.

В третьей главе «Примеры заданий ВПР, PISA, ОГЭ и ЕГЭ» приведены задания стандартизированной формы в соответствии ФГОС второго поколения по данной теме, а также задания, оценивающие функциональную грамотность школьников и умение применять знания на практике.

Итоговые тесты по теме «Линейная функция, её график и свойства в 7 классе» размещены в сети интернет на платформе Stepik, ссылка: https://stepik.org/course/93861/promo (см. разделы «Прямая пропорциональность», «Линейная функция»).

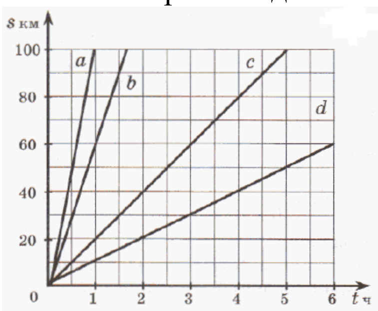
Учебный материал может быть использован для формирования фундаментальных понятий и закрепления соответствующих навыков и умений.

Глава 1. « Прямая пропорциональность y = kx, её график и свойства».

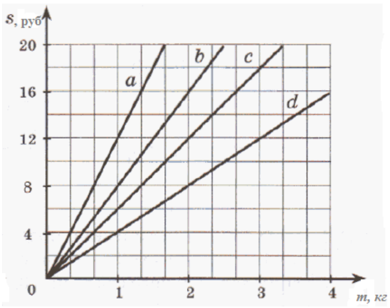
В начале, при проведении актуализации знаний, проводится повторение понятий, изученных ранее: координатной плоскости, нахождение значения функции по известному значению аргумента, построение точек по координатам, коэффициент пропорциональности.

Целесообразно предлагать аналогичные задания (упр.1 и упр.2) в 5-6 классах, что позволяет у учащихся развивать умение и приобретать навык чтения графика, нахождение значения функции при известном значении аргумента, нахождение значения аргумента при известном значении функции, определение зависимости величин (прямая пропорциональность), нахождение неизвестной величины, например: скорости движения каждого объекта или цену каждого товара, и тд.

Упр 1. По графикам движения, приведенным на чертеже, определите скорость движения каждого объекта и запишите формулу, выражающую зависимость пройденного расстояния *S* от времени движения *t*.



Упр 2. По графикам, приведенным на чертеже, определите цену каждого товара и запишите формулу, выражающую зависимость стоимости товара *S* от количества массы *m*.



Уже знаем: для обоих упражнений один и тот же тип зависимости называется прямо пропорциональной зависимостью, и может быть записан с помощью единой формулы $y = kx$, где величины y и x прямо пропорциональны и коэффициент пропорциональности находится по формуле: $k = \frac{y}{x}$. Графиком зависимостей является луч в I четверти начало которого в начале координат О (0;0).

При положительных k и x данное равенство показывает, что при увеличении (уменьшении) значения x в несколько раз значение y увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Заметим, что, согласно равенству $y = kx$, каждому рациональному числу x сопоставляется единственное число y. Значит:

Определение:

Прямо пропорциональная зависимость $y = kx$, где k – произвольное число, является функциональной зависимостью, или *функцией.* Область определения данной функции (значения аргумента x) являются все известные нам числа. Область значения данной функции (значения функции y) так же являются все известные нам числа.

Следовательно, можно предположить, что графиком прямой пропорциональности является прямая, где k - коэффициент пропорциональности (угловой коэффициент или коэффициент наклона прямой).

Самые простые линии на плоскости – прямые, и они задаются самыми простыми уравнениями - линейными, т.е. уравнениями вида $Ax + By + C = 0$, где *A, B,* и *C – произвольные числа.*

Любое уравнение вида $Ax + By = C$ *(кроме случая* $A = B = 0$*) задает на координатной плоскости некоторую прямую, и называется общим уравнением прямой.*

Несложно перейти от общего уравнения и к уравнению прямой с угловым коэффициентом (конечно, при $B \neq 0$): достаточно разрешить это уравнение относительно y:

$$Ax + By = C \;<=>\; y = -\frac{A}{B} + \frac{C}{B} \;<=>\; y = kx + b,$$

где $k = -\frac{A}{B}$, угловой коэффициент прямой.

Определение:

Функция вида $y = kx + b$, где k и b – произвольные числа, называется *линейной функцией.*

Рассмотрим частные случаи функции $y = kx + b$, где k и (или) b принимают значения, равные нулю.

I)

Значения коэффициентов	*Вид функции (аналитическая запись)*	*Особенности функции*
$b = 0$	$y = kx$	**Прямая пропорциональность** Графиком является прямая, проходящая через начало координат О (0;0).

Так как график прямой пропорциональности – это прямая, а через две различные точки можно провести ровно одну прямую, то для построения графика $y = kx$ нам достаточно найти лишь две точки, принадлежащие этой прямой. Например, чтобы построить график функции $y = 0,5x$ (рис 1). Составим таблицу значений и построим график функции.

x	0	4
y	0	2

$y(0) = k \cdot 0 = 0$, заметим, что при при любом коэффициенте пропорциональности k, если x=0, то y=0.

Значит: *График функции* $y = kx$ *всегда проходит через начало координат.*

Следовательно, чтобы построить график $y = kx$, нам надо найти лишь одну точку, принадлежащую этому графику.

Например, $y(4) = 0,5 \cdot 4 = 2$, а затем провести прямую через полученную точку (4;2) и начало координат.

Запишем *алгоритм построения графика функции* $y = kx$*. (I способ)*

1. Отметить на координатной плоскости *Oxy* точку *O* с координатами (0; 0).
2. Выбрать некоторое значение $x_1 \neq 0$.

3. Вычислить значение $y_1 = kx_1$/
4. Отметить на координатной плоскости *Oxy* точку *A* с координатами $(x_1;\ y_1)$.
5. Через точки *O* и *A* провести прямую.

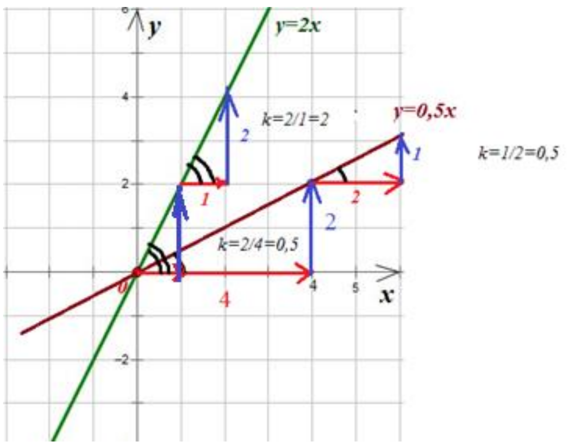


Рис. 1

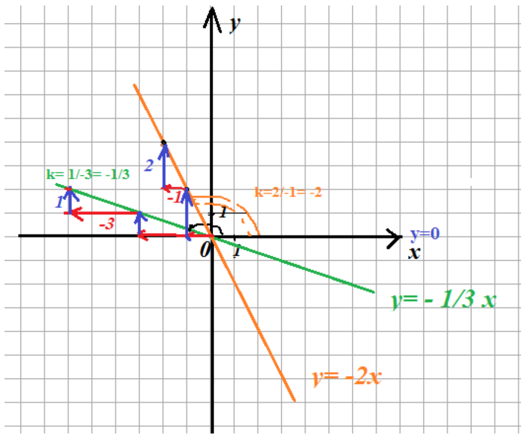


Рис. 2

Прямую $y = kx$ строим «от руки», без линейки, так как может быть смещение. При этом не забываем, учитывать угловой коэффициент прямой $k = \frac{y}{x}$, для этого ординату точки делим на абсциссу точки.

Необходимо обратить внимание на то, что в учебниках предлагается построение прямой по двум точкам (при выборе «удобных» аргументов, вычисляется значение функции), но учащимся можно предложить и некоторые другие способы.

<u>*II способ*</u> *(построение прямой по известной точке O(0;0) и* углового коэффициента наклона прямой*):*

Рис 1. Зная, значение углового коэффициента прямой $k = 0{,}5 = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, от точки *O(0;0),* лежащей в узле клетки, смещаемся на 2 (или 4) единичных отрезка вправо вдоль оси *Ox* и вверх на 1 (или 2) единичный отрезок вправо вдоль оси *Oy, п*опадая в узел клетки (двигаясь всегда от нижней точки вдоль оси *Ox* к верхней по оси *Oy*). Теперь через две точки с координатами О (0;0) и (2;1) (или (4; 2)) проводим прямую.

Рис 2. Например, значение углового коэффициента прямой $k = -\frac{1}{3}$, от точки *O(0;0),* лежащей в узле клетки, смещаемся на 3 единичных отрезка влево вдоль оси *Ox* и вверх на 1 единичный отрезок вправо вдоль оси *Oy, п*опадая в узел клетки). Теперь через две точки с координатами О (0;0) и (-3;1) проводим прямую.

Надо заметить, что не во всех учебниках 7 класса рассматривается такие понятие: как угол между прямой и положительной полуосью *Ox,* и его величина с монотонностью функции; расположение графика относительно биссектрисы углов и тд. Целесообразно данные понятия предлагать учащимся.

Расположение графика функции $y = kx$ на координатной плоскости зависит от знака коэффициента k. Так,

если $k > 0$, то знаки соответствующих значений y и x всегда одинаковы, поэтому график $y = kx$ располагается в I и III координатных четвертях (рис.1). Угол между прямой и осью абсцисс *Ox острый* и чем больше значения аргумента, тем больше значение функции, следовательно функция возрастает (или чем правее «идем», тем выше «поднимаемся»);

если $k < 0$, то знаки соответствующих значений y и x всегда различны, поэтому график $y = kx$ располагается в II и IV координатных четвертях (рис.2). Угол между прямой и осью абсцисс *Ox* тупой и чем больше значения аргумента, тем меньше значение функции, следовательно функция убывает (или чем правее «идем», тем ниже «опускаемся»);

если $k = 0$, то при всех значениях x значение $y = 0$. Значит, графиком прямой пропорциональности в этом случае является ось Ox.

Проведем математическое исследование:

1) Построим в одной координатной плоскости графики функций: $y = kx$ при $k = \left\{4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right\}$ (рис. 3).
2) Построим в одной координатной плоскости графики функций: $y = kx$ при $k = \left\{-4, -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right\}$ (рис. 4).

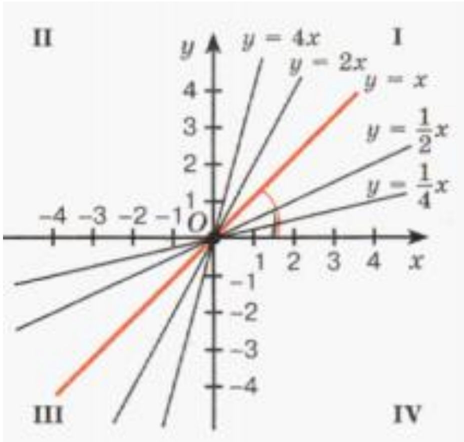


Рис. 3

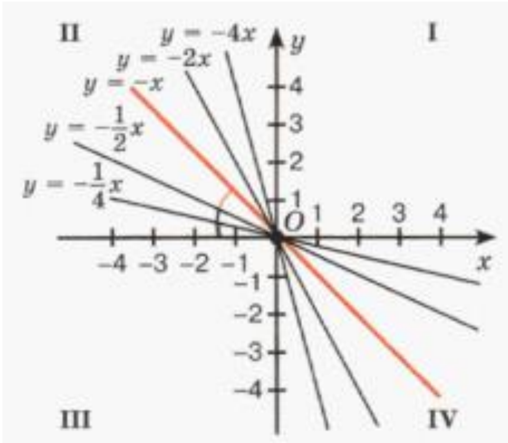


Рис. 4

Наблюдая за тем, как при изменении k ведет себя график прямой пропорциональности $y = kx$, можно заметить различные закономерности, например:

1) Если $k \neq 0$, то областью значений функции является множество всех известных нам чисел, а если $k = 0$, то область значений состоит из одного числа 0.
2) График функции $y = x$ ($y = -x$) является биссектрисой I и III (II и IV) координатных углов.
3) С увеличением $|k|$ острый угол между графиком $y = kx$ и осью абсцисс Ox увеличивается (график становится «круче»), а с уменьшением $|k|$ – уменьшается (график более «пологий»).
4) Если $k > 1$ $(k < -1)$ () график находится выше биссектрисы I (II) координатных углов соответственно.
5) Если $0 < k < 1$ $(-1 < k < 0)$ () график находится выше биссектрисы I (II) координатных углов соответственно.

Можно наблюдать и многие другие закономерности расположения графика прямой пропорциональности $y = kx$: например, его симметрия относительно начало координат; особенности его расположения относительно координатных осей и другие.

Упр 3.

Выберите из предложенных зависимостей те, которые являются прямой пропорциональностью, и укажите коэффициент пропорциональности k.

1) $y = -3x$;	5) $y = x : 4$;
2) $y = x + 2$;	6) $y = 7 : x$;
3) $y = 0{,}7x$;	7) $y = 6x^2$;
4) $y = 0 \cdot x$;	8) $y = 5x$;

9) $y = 0 \cdot x + 3;$ 10) $y = 0 - 9x.$

Упр 4.

1) Запишите формулу зависимости стоимости покупки груш по цене 2,5 тыс. рублей за центнер от массы купленных груш. Докажите, что данная зависимость является прямой пропорциональностью, и постройте ее график. Что вы замечаете?

2) Какое минимальное количество точек нужно отметить на координатной плоскости для построения графика прямой пропорциональности? Почему? Какие точки лучше взять?

3) Исходя из своих наблюдений, составьте алгоритм построения графика прямой пропорциональности.

4) Сравните свои выводы и алгоритм с выводами и алгоритмом теоретической части данной темы.

Упр 5.

Пользуясь алгоритмом построения графика прямой пропорциональности, постройте на одной координатной плоскости графики зависимости $y = kx$, если:

1) $k = 1;\ k = 3;\ k = \frac{1}{3};\ k = 6;\ k = \frac{1}{6};$

2) $k = -1;\ k = -3;\ k = -\frac{1}{3};\ k = -6;\ k = -\frac{1}{6}.$

Что вы замечаете? Сравните свои вывод с выводами теоретической части данной темы.

Очень важно с учащимися проводить устную работу, отрабатывая навыки чтения графика (свойства графика), что дает возможность отработать умение говорить и обосновать свойства функции на математическом языке.

Упр 6.(Устно)

Не строя графика зависимости $y = kx$, определите:

а) в каких координатных четвертях он будет расположен;

б) монотонность графика прямой пропорциональности;

в) угол между прямой и положительной полуосью абсцисс *Ox, если:*

1) $k = 2{,}4;$
2) $k = -5{,}8;$
3) $k = -1{,}7;$
4) $k = 7{,}8.$

Упр 7.(Устно) *В зависимости от уровня класса, можно некоторые выкладки записать в тетради.*

Определите коэффициент пропорциональности функции $y = kx$, проходящей через точку *A*. Опишите расположение ее графика в координатной плоскости:

а) в каких координатных четвертях он будет расположен;

б) монотонность графика прямой пропорциональности;

в) угол между прямой и положительной полуосью абсцисс *Ox, если:*

1) *A* (2; 10);
2) *A (- 4; 12);*
3) *A (0,5; -2);*
4) *A (-0,4; -8);*
5) *A (-4; 0,5);*
6) *A (3; - 1,8);*
7) *A (1,2; 6);*
8) *A (-7; -1,4).*

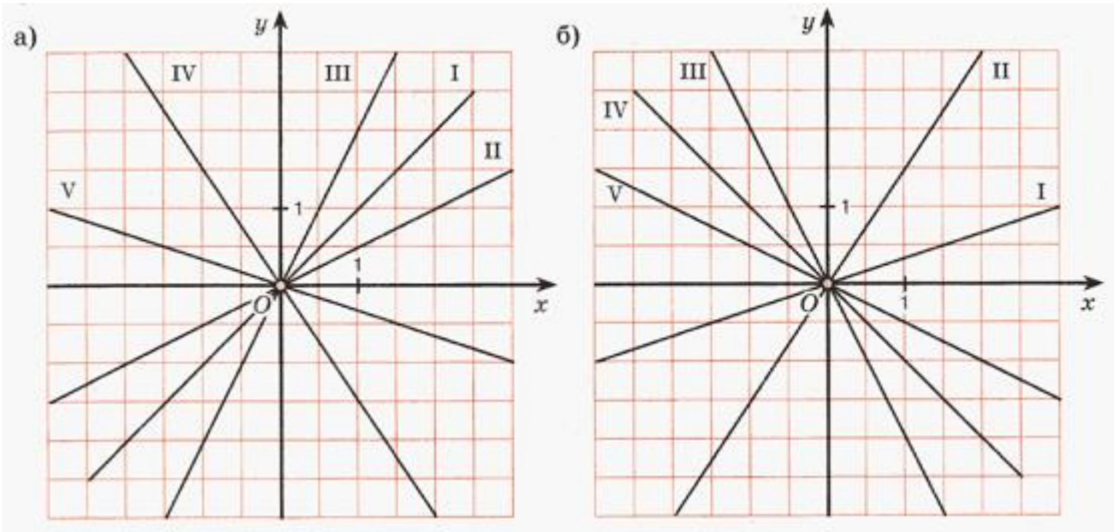
Упр 8.

Постройте на одной координатной плоскости графики функций $y = x$ и $y = -x$ и два графика прямой пропорциональности, один из которых проходит через точку A, другой через точку B. Задайте данные функции аналитически (формулой). Что вы замечаете?

1) A (4; 1), B (4; -1);
2) A (-2; 8), B (2; 8);
3) A (4; 10), B (-4; 10);
4) A (5; -2), B (-5; -2);
5) A (-2; -7), B (2; -7);
6) A (4; 1,5), B (-4; 1,5).

Упр 9.

Задайте аналитически (формулой) каждую из функций, представленных на графике:



Упр 10.

Прямая проходит через начало координат и точку A. Является ли эта прямая графиком функции $y = kx$, если:

1) $k = 3$, A (2; 6);
2) $k = -2$, A (-1; -2);
3) $k = 4$, A (-2; -8);
4) $k = -0{,}5$, A (2; -1);
5) $k = -1{,}5$, A (3; -4);
6) $k = 2{,}1$, A (3; 6,3).

Глава 2. «Линейная функция $y = kx + b$, её график и свойства».

Нецелесообразно начинать изучение этой темы с определения, вводя линейную функцию как некий абстрактный объект. Желательно предварительно рассмотреть несколько реальных ситуаций, которые описываются с помощью линейной функции.

Следует уделить внимание рассмотрению понятий: прямая пропорциональность, угловой коэффициент наклона, монотонность функции, расположение прямой относительно $k > 0,\ k < 0,\ k = 1,\ k = -1,\ 0 < k < 1,\ k > 1$.

Рассмотрев прямую пропорциональность, перейдем к более сложной зависимости между величинами. *Решим задачу.*

Задача. Ване надо купить x карандашей и ручку. Один карандаш стоит 15 рублей, а ручка – 50 рубля. Сколько денег должен заплатить Ваня за всю покупку?

Решение: Чтобы узнать стоимость Ваниной покупки, надо сложить стоимость карандашей и ручки. Карандаши стоят $15x$ рублей, а ручка 50 рубля. Значит, Ваня должен заплатить $15x + 50$ рубля.

Можно заметить, что зависимость между количеством карандашей и стоимостью всей покупки не является прямой пропорциональностью, следовательно, она не может быть описана формулой $y = kx$. Но ее можно записать в виде $y = kx + b$, где k и b – произвольные числа. Зависимости такого вида называются *линейными.*

<u>*Определение 1.*</u> Зависимость между величинами x и y называется линейной, если данные величины связаны формулой $y = kx + b$, где k и b – произвольные числа

Для каждого значения x можно найти соответствующее значение стоимости покупки:

если $x = 1$, то $15x + 50 = 15 \cdot 1 + 50 = 65$ руб.;

если $x = 2$, то $15x + 50 = 15 \cdot 2 + 50 = 80$ руб. и т.д.

Следовательно, для равенства $y = kx + b$ каждому рациональному числу x сопоставляется единственное число у. Значит, линейная зависимость является функциональной (т.е. функцией). А область определения данной функции, которая получила название *линейной*, являются все известные нам числа.

<u>*Определение 2.*</u> Функция вида $y = kx + b$, где k и b – произвольные числа, называется *линейной функцией.*

Рассмотрим частные случаи функции $y = kx + b$, где k и (или) b принимают значения, равные нулю.

Значения коэффициентов	*Вид функции (аналитическая запись)*	*Особенности функции*
$b = 0$	$y = kx$	**Прямая пропорциональность** Графиком является прямая, проходящая через начало координат O (0;0).
$k = 0$	$y = b$	Графиком является прямая $y = b$, проходящая через A (0; b), параллельная оси Ox
$k = 0, \quad b = 0$	$y = 0$	Графиком является ось Ox

Чтобы построить график линейной функции, например, $y = 0{,}5x + 3$, построим сначала знакомый нам график прямой пропорциональности $y = 0{,}5x$. Это прямая, проходящая через точки с координатами (0; 0) т (2; 1) (рис. 5).

Рис. 5

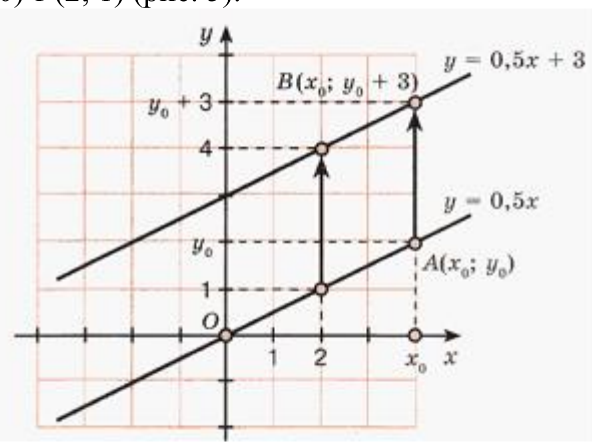


Рис. 6

Для того чтобы построить график $y = 0{,}5x + 3$, заметим, что он получается сдвигом графика $y = 0{,}5x$ вдоль оси *Oy* на 3 единицы вверх (рис. 6). Действительно, найдем значение этих функций в произвольной точке x_0:

Функция	*Значение аргумента*	*Значение функции*	*Соответствующая точка графика*
$y = 0{,}5x$	x_0	$y_0 = 0{,}5x_0$	$A\ (x_0;\ y_0)$
$y = 0{,}5x + 3$	x_0	$0{,}5x_0 + 3 = y_0 + 3$	$B\ (x_0;\ y_0 + 3)$

Таким образом, ордината любой точки *B* графика $y = 0{,}5x + 3$ на 3 единицы больше, чем ордината точки *A* графика $y = 0{,}5x$ с той же абсциссой x_0. Значит, если сделать параллельный перенос графика $y = 0{,}5x$ на 3 единицы вверх вдоль оси *Oy*, то получим $y = 0{,}5x + 3$.

Аналогично рассуждая, можно показать, что

График линейной функции $y = kx + b$, где k и b – произвольные числа, может быть получен из графика функции $y = kx$ путем его параллельного переноса вдоль оси Oy на b единиц вверх, если $b > 0$, или на $|b|$ единиц вниз, если $b < 0$

Итак, график линейной функции также является прямой. Значит, как и для графика прямой пропорциональности, достаточно найти лишь две точки, принадлежащие этому графику.

В зависимости от возможности класса желательно рассмотреть несколько способов построения графика линейной функции.

Построим, например, график функции $y = -\frac{x}{3} - 1$. Рассмотрим несколько способов.

<u>*I способ*</u> *(построение графика функции с помощью параллельного переноса):*

Сначала строим график

(b = - 1 < 0)

$y = -\frac{x}{3} \Rightarrow$ параллельный перенос вдоль оси *Oy* на |-1|=1 единицу вниз $\Rightarrow y = -\frac{x}{3}$ - 1 (рис. 7).

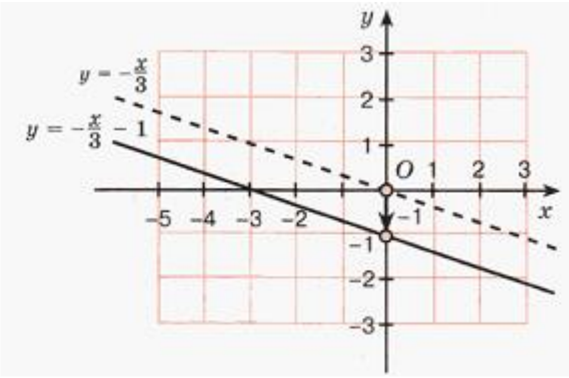


Рис. 7

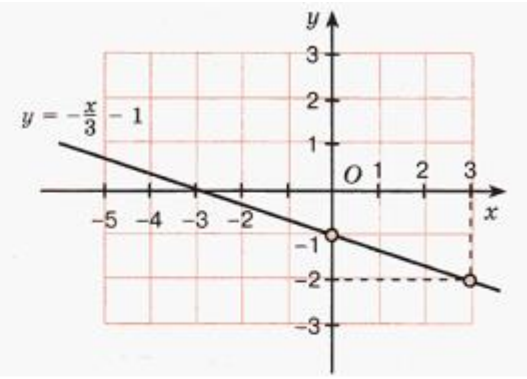


Рис. 8

<u>*II способ*</u> *(стандартный, рассматривается в каждом учебнике:)*

Этот способ удобен для построения произвольного графика линейной функции. Найдем две точки, принадлежащие графику функции $y = -\frac{x}{3} - 1$.

Составим таблицу значений и построим график функции.

x	0	3
y	-1	- 2

Выбираем аргументы функции с учетом удобства вычислений, например:

$y(0) = -\frac{0}{3} - 1 = -1, \quad y(3) = -\frac{3}{3} - 1 = -1 - 1 = -2.$

Значит, график данной функции проходит через точки с координатами (0; -1) и (3; -2). Построим эти две точки и проведем через них прямую (рис. 8).

Запишем <u>*алгоритм построения графика функции* $y = kx + b$.</u>

1. Выбрать два различных значения x: x_1 и x_2.
2. Вычислить значение $y_1 = kx_1 + b$.
3. Вычислить значение $y_2 = kx_2 + b$.
4. Отметить на координатной плоскости *Oxy* точку *A* с координатами $(x_1;\ y_1)$.
5. Отметить на координатной плоскости *Oxy* точку *B* с координатами $(x_2;\ y_2)$.
6. Через точки *A* и *B* провести прямую.

Нужно заметить, что данный алгоритм построения графика линейной функции может использоваться при любых k и b . А значит, с его помощью может быть построен и график прямой пропорциональности $y = kx$ (случай, когда $b = 0$), и график прямой $y = b$ (случай, когда $k = 0$).

<u>*III способ:*</u>

Желательно обсудить алгоритм построения графика функции по двум «особым» точкам.

Рассмотрим аналитическую запись линейной функции $y = kx + b$ (формулу): $y = -\frac{x}{3} - 1$, т.к. уже известно, что при *x=0* ⇒ *y =b* , то одна точка с координатами *B (0; b)* – лежит на оси *Oy (B (0; -1))*, вторую точку строим, зная $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{3} = \frac{1}{-3}$ ⇒ от точки *B* двигаемся влево на 3 единицы вдоль оси *Ox*, и вверх вдоль оси *Oy* на 1 единицу, получаем точку *A (-3; 0).*

Такой способ построения прямой, позволяет учащимся без «лишних вычислений» находить две точки на плоскости, через которые проходит данная прямая.

A -3 *B*

x	0	-3
y	-1	0

+1

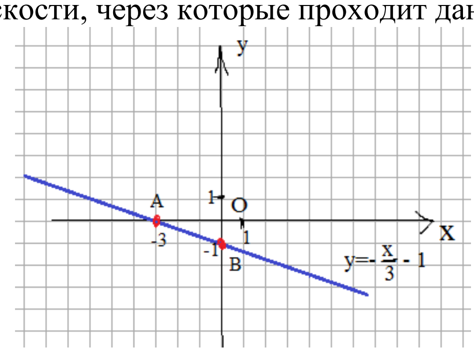


Рис. 9

Если число $b \notin Z$, то определяем любую точку с целыми координатами, близкую к началу координат, и строим вторую точку относительно первой, учитывая *k*.

Например: $y = \frac{2x}{3} - \frac{1}{3}$ (рис. 10), от A_1 *(-1; -1)* двигаемся вправо на 3 единицы вдоль оси *Ox*, и вверх вдоль оси *Oy* на 2 единицу, получаем точку B_1 *(2; 1).*

A_1 +3 B_1

x	-1	2
y	-1	1

+2

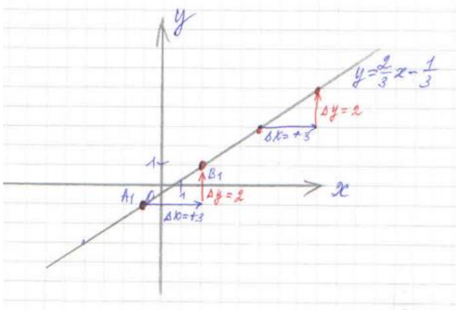


Рис.10

<u>*IV способ*</u> *(для учащихся, желающих обучаться на продвинутом уровне):*

Рассмотрим уравнение прямой в отрезках, доказательство и вывод этого уравнения будет дано в старших классах, но формулировку и некоторые преобразования рассмотрим сейчас, чтобы пользоваться при решении задач на построение.

Знаем, общее уравнение прямой $Ax + By = C$ *(кроме случая* $A = B = 0$*) задает на координатной плоскости некоторую прямую.*

Преобразуем $Ax + By = C$ разделим левую и правую часть уравнения на число C, отличное от нуля, получим $\frac{Ax}{C} + \frac{By}{C} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{C}{A}} + \frac{y}{\frac{C}{B}} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Уравнение такого вида $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ называется уравнением прямой в отрезках. Графиком такого уравнения является некоторая прямая *AB*, которая пересекает ось *Ox* в точке *A* (*a*; 0), а ось *Oy* - *B* (0; *b*).

Преобразуем нашу линейную функцию $y = -\frac{x}{3} - 1 \Rightarrow -\frac{x}{3} - y = 1 \Rightarrow \frac{x}{-3} + \frac{y}{-1} = 1 \Rightarrow$ $a = -3,\ b = -1$. Прямая проходит через точку А (-3; 0) и В (0; -1) (рис. 9).

Упр 11.

1) а) На овощной базе было 4 т картофеля. Ежедневно на базу привозили по 2 т картофеля. Запишите формулу зависимости количества картофеля на базе в тоннах от количества дней завоза картофеля.

б) После того как Виктор прошел 3 км, он пошел со скоростью 4 км/ч. Запишите формулу зависимости длины пути в километрах, пройденного Виктором, от времени его движения со скоростью 4 км/ч (в часах).

в) До начало наполнения бассейна в нем было 2 м^3 воды. После включения насоса в него ежечасно стало поступать 0,5 м^3 воды. Запишите формулу зависимости объема воды в бассейне в м^3 от времени работы насоса в часах.

г) Температура воды в кастрюле равна 20°C. После того как кастрюлю поставили на огонь, температура воды в ней стала ежеминутно повышаться на 10°C. Запишите формулу зависимости температуры воды в кастрюле в $^{\circ}$C от времени ее нагревания в минутах.

2) Что общего во всех построенных вами формулах? Запишите их все с помощью одной общей формулы. Является ли эта зависимость функциональной?

3) Рассмотрите частные случаи построенной зависимости, когда один или сразу оба коэффициента равны нулю. Что вы замечаете? Сравните свои наблюдения и выводы с выводами теоретической части данной темы.

Упр 12.

Выберите из предложенных зависимостей между переменными y и x линейные функции, запишите их виде $y = kx + b$ и определите коэффициенты k и b. Найдите область определения и область значений этих функций.

а) $y = -x + 4$;
б) $y = 3 - 4x$;
в) $y = 13x$;
г) $y = x : 3$;
д) $y = 7 : x - 5$;
е) $y = 0{,}7x + 1$;
ж) $y = -9$;
з) $y = x^2 + 11$;
и) $y = \frac{3-5x}{2}$.

Упр13.

Линейная зависимость задана аналитически (формулой). Заполните таблицу и постройте ее график. Ответьте на вопросы:

- В точках с какими координатами этот график пересекает ось абсцисс, ось ординат?
- В каких координатных четвертях он расположен?
- Каков угол наклона прямой?
- Какова монотонность функции? Почему?
- Запишите уравнение прямой в отрезках.

а) $y = -x + 4$

x	*0*	*4*
y		

б) $y = 3x - 5$

x	*0*	*2*
y		

в) $y = -2\frac{1}{3}x - 4$

x	*0*	*-3*
y		

Упр 14.(Устно)

Пользуясь формулой, задающей линейную зависимость, заполните пустые клетки таблицы:

а) $y = 3x - 9$

x	*-1*	
y		*-6*

б) $y = -6x + 7$

x	*2,5*	
y		*0*

в) $y = 0{,}5x - \frac{2}{3}$

x	*1*	
y		*-2*

Упр 15.

Для функции $y = f(x)$ найдите $f(0)$, $f(2)$, $f(-2)$. Найдите значение *x*, при которых $f(x) = 0, f(x) = 1, f(x) = -1$. Составьте таблицу и запишите в ней результаты вычислений. Составьте уравнение прямой в отрезках.

а) $y = -3x + 8$; б) $y = 1{,}5x - 2$; в) $y = 11 - 3{,}5x$.

Упр 16.

Постройте график функции $y = f(x)$. При каких значениях *x* значение *y* равно нулю, больше нуля, меньше нуля?

а) $y = -x + 2$; б) $y = 0{,}6x - 3$; в) $y = -0{,}5x - 1{,}5$.

Очень важной частью этого задания является чертеж. Предлагается следующие оформление:

Упр 17.

Постройте график функции $y = f(x)$, заданной на множестве $a \le x \le b$. Отметьте цветным карандашом на оси *Ox* область определения, а на оси *Oy* – область значений данной функции.

а) $f(x) = 4x + 3$, если $a = -2$, $b = 1$;
б) $f(x) = -2x + 5$, если $a = -1$, $b = 5$;
в) $f(x) = -3x + 1$, если $a = -2$, $b = 3$.

Упр 18.

Постройте на одной координатной плоскости графики трех данных функций. Что вы замечаете? (Какое взаимное расположение данных прямых? Как расположены относительно прямой $y = kx$ графики функций? Какие по монотонности данные функции? и т.д.)

а) $y = -x;\ \ y = -x + 2;\ \ y = -x - 1;$ б) $y = 3x;\ \ y = 3x - 4;\ \ y = 3x + 1.$

Определите по графикам, на сколько единиц изменяется (уменьшается или увеличивается) значение функции, если значение аргумента увеличивается на 1, уменьшается на 2.

Упр 19. (Устно)

1) Как по графику функции $y = kx$ найти значение коэффициента k ?

2) Проанализируйте взаимное расположение графиков линейных функций на рис. 10 и задайте данные функции аналитически (формулами).

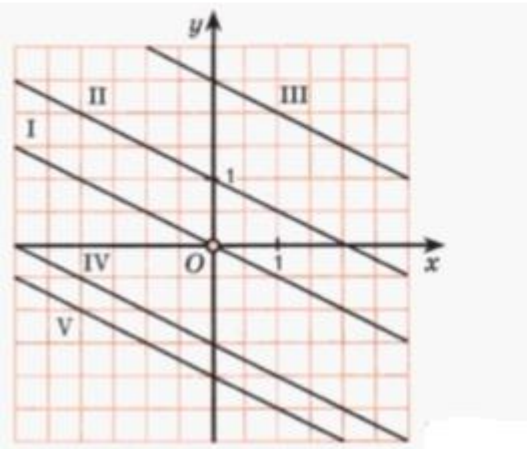


Рис. 10

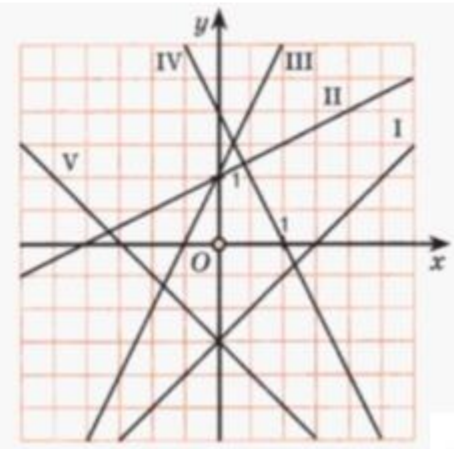


Рис. 11

Упр 20.

Задайте формулой каждую из функций, графики которых представлены на рис. 11.

Упр 21.

Не выполнения построение графика функции $y = f(x)$, найдите координаты его точек пересечения с осями координат *Ox* и *Oy.*

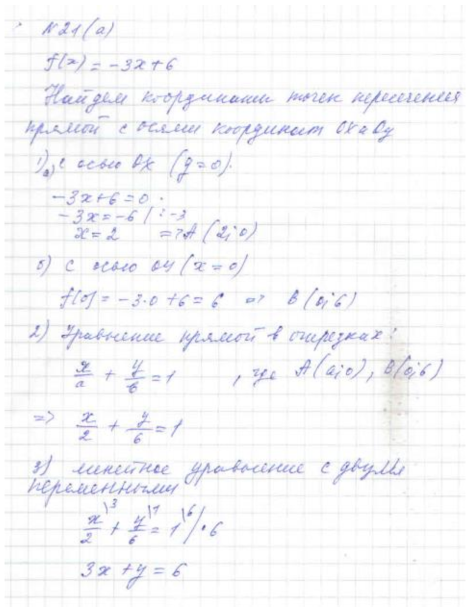
Для данного графика функции запишите:

- уравнение прямой в отрезках;

- линейное уравнение с двумя переменными.

а) $f(x) = -3x + 6;$ б) $f(x) = 4{,}2x - 6;$ в) $f(x) = 2{,}2x - 6{,}6.$

Решение:


№21(а)

$f(x) = -3x+6$

Найдем координаты точек пересечения прямой с осями координат Ox и Oy

1) а) с осью Ox ($y=0$).

$-3x+6=0$

$-3x=-6 \mid :-3$

$x=2 \quad \Rightarrow A(2;0)$

б) с осью Oy ($x=0$)

$f(0) = -3\cdot 0+6=6 \Rightarrow B(0;6)$

2) Уравнение прямой в отрезках:

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, где $A(a;0)$, $B(0;b)$

$\Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$

3) линейное уравнение с двумя переменными

$\frac{x}{2}^{\backslash 3}+\frac{y}{6}^{\backslash 1}=1^{\backslash 6} \mid \cdot 6$

$3x+y=6$

Упр 22.

Постройте график функции $y = -2x + 4$ и определите по графику, как изменяется значение функции y, когда:

а) x возрастает от 2 до 6;

б) x убывает от 1 до - 1;

г) x возрастает от 4 до -3;

д) x убывает от - 2 до 5.

Упр 23.

В одной координатной плоскости постройте графики линейных функций:

$y = -2$; $y = 1$; $y = 4$; $y = -1{,}8$; $y = 0$.

Для каждой функции определите значения коэффициентов k и b.

Упр 22.

В каких координатных четвертях расположен график функции $y = kx + b$, если:

а) $k > 0$, $b > 0$; в) $k > 0$, $b > 0$; д) $k > 0$, $b = 0$; ж) $k = 0$, $b > 0$;

б) $k > 0$, $b < 0$; г) $k < 0$, $b < 0$; е) $k < 0$, $b = 0$; з) $k = 0$, $b < 0$.

Для каждого случая сделайте схематичный график.

Упр 23.

Определите знаки k и b, если график линейной функции $y = kx + b$ расположен в следующих четвертях координатной плоскости:

а) в I, II и III четвертях; в) в I, III и IV четвертях;

б) в I, II и IV четвертях; г) в II, III и IV четвертях.

Для каждого случая сделайте схематичный график.

Упр 24.

Может ли график линейной функции $y = kx + b$ располагаться на координатной плоскости только:

а) в I и II четвертях; в) в III и IV четвертях; д) в I и III четвертях.

б) в I и IV четвертях; г) в II и III четвертях. е) в II и IV четвертях?
Для каждого случая сделайте схематичный график.

Упр 25. (Устно)

В таблице значений некоторой линейной функции два из пяти значений заданы неверно. Найдите неверные значения и исправьте их.

а)

x	*- 2*	*-1*	*0*	*1*	*2*
y	*-4*	*-2*	*-1*	*4*	*1*

б)

x	*- 2*	*-1*	*0*	*1*	*2*
y	*-4*	*-7*	*-2*	*-1*	*5*

Упр 26.

Постройте на одной координатной плоскости Оху графики:
$y = 4x$; $y = 2 - 5x$; $y = 4x - 3$; $y = -2 - 5x$; $y = 4x + 3$; $y = -5x$.
Какие из этих прямых пересекаются? Какие прямые параллельные друг другу?

Целесообразно рассмотреть задания, которые встречаются на ВПР, PISA, ОГЭ и ЕГЭ, показав различные способы решения.

Целесообразно показать учащимся быстрый способ нахождения уравнения прямой: определение коэффициентов k и b. Данный способ можно назвать – *метод трех точек.*

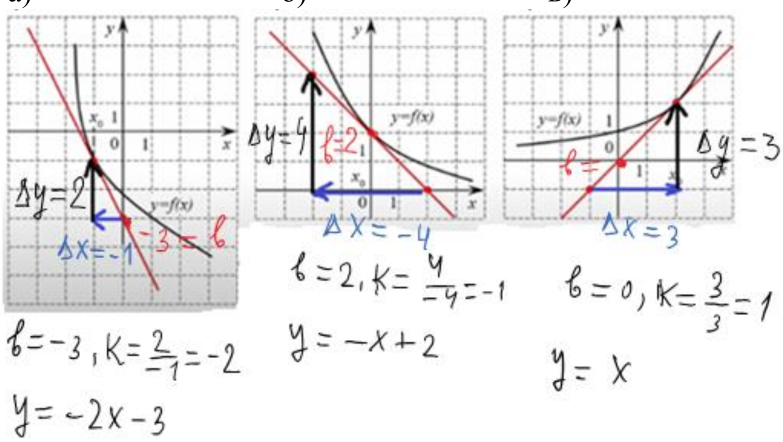
Любая невертикальная прямая на координатной плоскости может быть задана уравнением прямой $y = kx + b$.

Алгоритм нахождения коэффициентов k *и* b.

1. Определить ординату точки пересечения с осью *Oy* *B(0; b)*⇒*b=y(0).*
2. Выбрать на прямой любые две точки с целочисленными координатами. Построить прямоугольный треугольник, катеты параллельны осям *Ox и Oy,* двигаясь от нижней точки к верхней. Найти длину каждого катета и записать по формуле $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, при условии: если движение идет от нижней точки к верхней по катету вправо, то $\Delta x > 0$; если движение идет от нижней точки к верхней по катету влево, то $\Delta x < 0$.
3. Записать уравнением прямой $y = kx + b$.

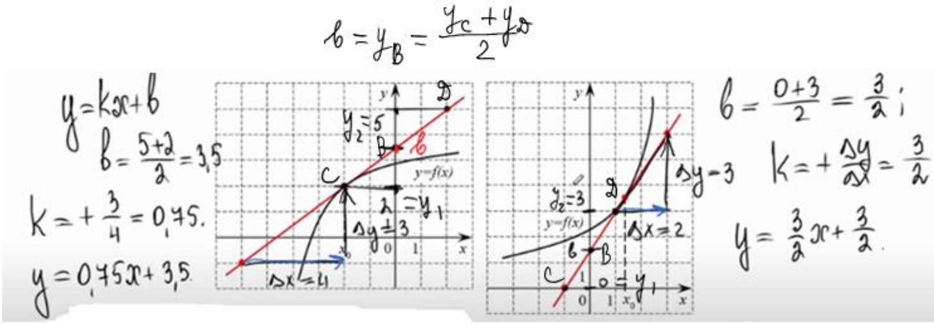
Например: Составьте уравнение прямой.

1) а) б) в)



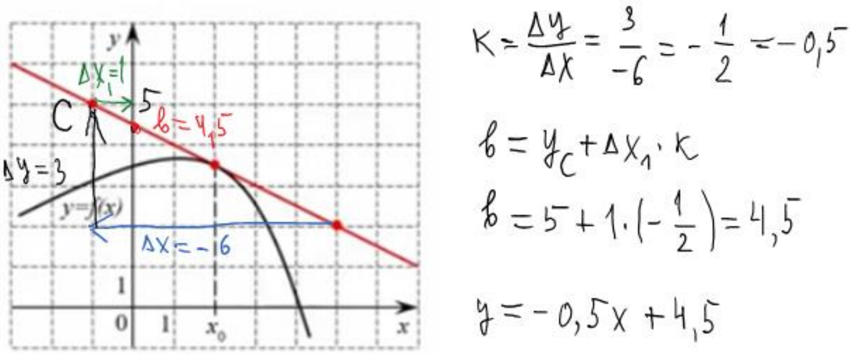
2) Случай дробных коэффициентов k и b (b – дробное число), где точка пересечения прямой с осью *Oy* *B(0; b)* является серединой отрезка *CD (*точки *C* и *D* с целочисленными координатами, близкие к оси *Oy*)

а) б)



3) Другой способ нахождения дробных коэффициентов k и b, где b – дробное число. Сначала нужно определить коэффициентов k, далее находим b:

- выбрать любую точку C целочисленными координатами, близкую к оси Oy и лежащую левее оси Oy;
- найти расстояние от этой точки C до оси Oy - Δx_1;
- определить ординату этой точки C - y_C;
- вычислить коэффициент b по формуле: $b = y_C + \Delta x_1 \cdot k$.



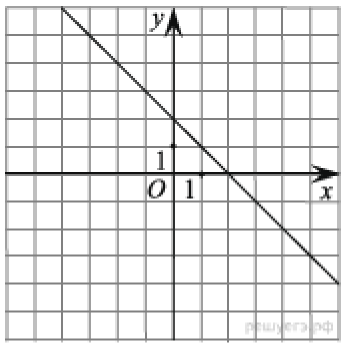
Глава 3. Примеры заданий ВПР, PISA, ОГЭ и ЕГЭ

Целесообразно рассмотреть задания ВПР, PISA, ОГЭ и ЕГЭ.

ВПР

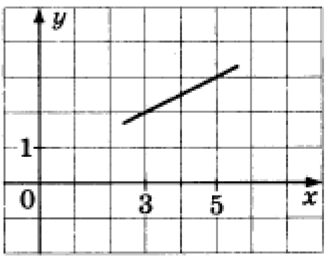
1)

На рисунке изображён график линейной функции. Напишите формулу, которая задаёт эту линейную функцию.



2)

На рисунке изображён участок графика линейной функции $y = kx + b$. Укажите знак числа b.



PISA

1)

ПАССАЖИРСКИЕ КОНВЕЙЕРЫ

Вопрос 1: ПАССАЖИРСКИЕ КОНВЕЙЕРЫ

Справа вы можете увидеть фотографию пассажирских конвейеров.

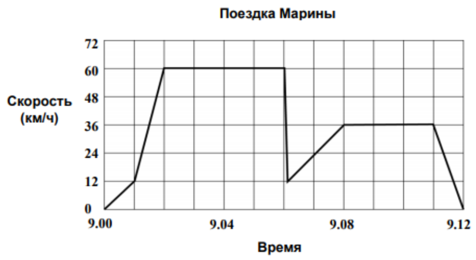
График Расстояние – Время, расположенный ниже, демонстрирует разницу между человеком, идущим по двигающемуся конвейеру и человеком, идущим по платформе рядом с двигающимся конвейером.

Допустив, что для графика, приведенного выше, скорость ходьбы примерно одинакова для обоих человек, проведите на графике линию, которая демонстрировала бы отношение между расстоянием и временем для человека, который стоит на передвигающемся пассажирском конвейере.

2)

ПОЕЗДКА НА МАШИНЕ

Марина отправилась покататься на машине. Во время поездки дорогу перед машиной перебежала кошка. Марина резко нажала на тормоз и сумела объехать кошку. Она была так взволнована этим происшествием, что решила вернуться домой.



На приведенном ниже графике представлена скорость машины во время поездки.

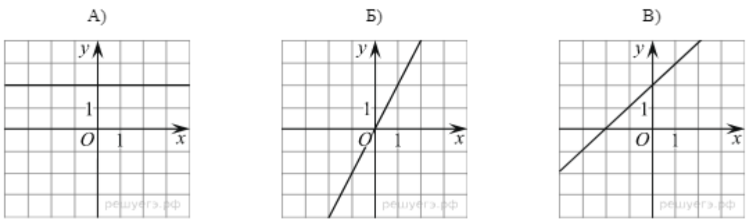
Вопрос 1: ПОЕЗДКА НА МАШИНЕ

Который был час, когда Марина нажала на тормоз, чтобы не переехать кошку?

ОГЭ

1)

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.



1) $y = 2x$
2) $y = -2x$
3) $y = x + 2$
4) $y = 2$

Ответ укажите в виде последовательности цифр без пробелов и запятых в указанном порядке.

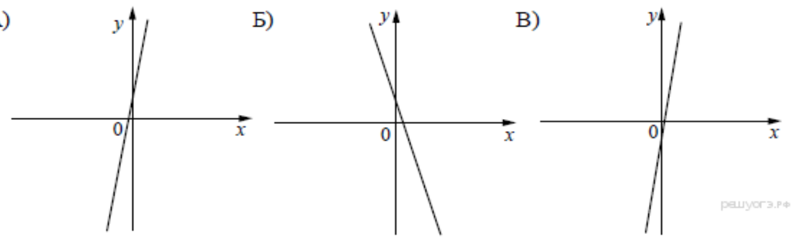
А	Б	В

2)

На рисунке изображены графики функций вида $y = kx + b$. Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов k и b.

Графики

А) Б) В)



Коэффициенты

1) $k < 0,\ b > 0$ 2) $k > 0,\ b > 0$ 3) $k < 0,\ b < 0$ 4) $k > 0,\ b < 0$

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В

3)

Постройте график функции

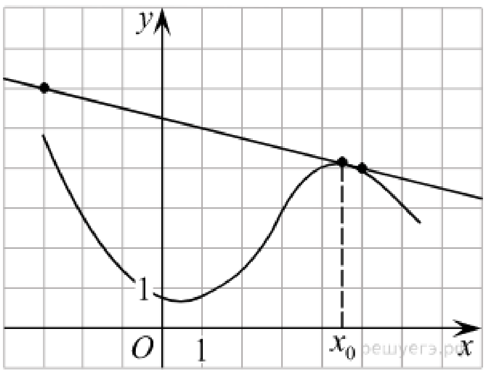
$$y = \begin{cases} 2x+1, \text{ если } x<0, \\ -1{,}5x+1, \text{ если } 0 \le x < 2, \\ x-4, \text{ если } x \ge 2 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях прямая $y = c$ имеет с графиком ровно две общие точки.

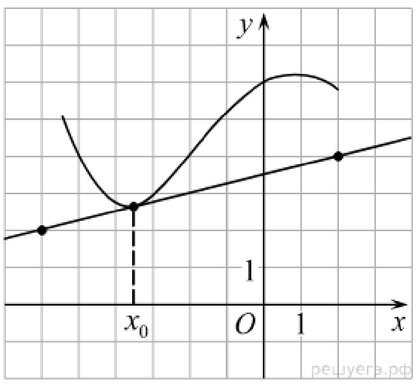
ЕГЭ

Определите значение производной в данной точке x_0 (угловой коэффициент прямой k):

а)



б)



Заключение

На примерах решения простых заданий, *разбивая учебный материал на очень мелкие элементы, можно подвести учащихся к пониманию таких сложных тем для учащихся, как «Построение кусочно-линейной функции», и поможет при изучении в 10-11 классах понятия, «Коэффициент касательной к графику функции» в теме «Производная». Такой подход, по моему мнению, является эффективным и является подготовительным этапом к изучению сложных понятий и готовит учащихся к решению сложных задач. Этот подход к изучению новой темы можно применить на каждом уроке.*

Литература:

1. Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. Алгебра.7 класс: учебник – М.: Издательство «Ювента», 2019.
2. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.. Алгебра . 7 класс: учебник для общеобразовательных организаций – М.: Вентана-Граф, 2020.
3. Буцко Е.В., Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Алгебра: 7 класс: методическое пособие. – М.: Вентана-Граф, 2017.
4. Мордкович А.Г. Алгебра: 7-9 класс. Методическое пособие для учителя. – М.: Мнемозина, 2019.
5. Примерная авторская программа А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир, Е.В. Буцко: Математика: рабочие программы: 5-11 классы / - М.: Вентана-Граф, 2017.